1 Die quadratische Funktion

A 1.1. Viola stellt ihrem Bruder folgende Aufgabe: "Fange mit der 1 an. Addiere dann zu dem Ergebnis 3. Zu diesem Ergebnis addiere 5. Dann addiere 7. Gehe weiter so fort, bis die Tabelle ausgefüllt ist."

a) Fülle die folgende Tabelle nach dieser Regel aus.

Schritt	1	2	3	4	5	6
Wert	1	$1+3=4$				

b) Ihr Bruder hat als Hausaufgabe bekommen, die Fläche eines Quadrats mit den Kantenlängen von 1 cm bis 7 cm zu berechnen.
Fülle die folgende Tabelle sinnvoll aus.

Kantenlänge [cm]	1	2	3	4	5	6
Fläche [cm^2]						

c) Vergleiche die beiden Tabellen miteinander.

Der Zusammenhang zwischen den Werten aus der vorherigen Aufgabe wird durch die **quadratische Funktion**

$$f(x) = x^2$$

beschrieben. Der Graph dieser Funktion heißt **Normalparabel**.

Um den Funktionswert für eine Zahl – z.B. -5 – zu bestimmen, wird das x im Funktionsterm durch diese Zahl – in unserem Beispiel die -5 – ersetzt: $f(-5) = (-5)^2 = 25$

A 1.2. Die Merkmale einer Funktion kann man sehr gut an ihrem Graphen erkennen.

a) Fülle die folgende Tabelle sinnvoll aus.

x	-5	-4	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5
$f(x) = x^2$	-25							

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4	5
$f(x) = x^2$									

b) Zeichne den Graphen der Normalparabel unter Verwendung der vorherigen Tabelle. Benutze den Maßstab 1 cm : 1. Überlege vorher, wie groß das ganze Koordinatensystem werden muss. Tipp: Der Funktionswert ist die y-Koordinate des Punktes.

Die Basisfunktion $f(x) = x^2$ kann durch einen Faktor a verändert werden: Es ensteht eine weitere quadratische Funktion mit der Form $f(x) = ax^2$. Was bewirkt dieser Faktor? Das sollst Du jetzt untersuchen.

A 1.3. Gegeben sind die Funktionen $g(x) = 2\,x^2$ und $h(x) = 0{,}5\,x^2$.

a) Erstelle eine Wertetabelle wie in der vorherigen Aufgabe für die Funktionen.
b) Zeichne die Graphen zu den Funktionen. Nutze dafür das Koordinatensystem aus der vorherigen Aufgabe.
c) Auch die Graphen dieser Funktionen nennt man Parabeln. Beschreibe den Unterschied der beiden Parabeln zur Normalparabel.
d) Gegeben ist die allgemeine Funktion $f(x) = a\,x^2$. Beschreibe den Einfluss des Faktors a auf den Graphen.

A 1.4. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = -x^2$, $g(x) = -2\,x^2$ und $h(x) = -0{,}5\,x^2$.

a) Erstelle eine Wertetabelle wie in der vorherigen Aufgaben für die Funktionen. Gehe dabei möglichst geschickt vor.
b) Zeichne die Graphen zu den Funktionen. Nutze dafür ein Koordinatensystem für alle Graphen.
c) Diese Graphen sind ebenfalls Parabeln. Beschreibe den Unterschied dieser Parabeln zur Normalparabel.
d) Die Funktionen haben die Form $f(x) = a\,x^2$. Beschreibe die Auswirkungen eines negativen Faktors a auf den Graphen.

A 1.5. Fasse Deine Ergebnisse für die Funktion $f(x) = a\,x^2$ zusammen. Berücksichtige dabei Symmetrie, Verlauf. Scheitelpunkt (tiefster bzw. höchster Punkt) und Öffnung, sowie die Rolle des Faktors a.

2 Anwendungsaufgaben zu $f(x) = ax^2$

Beispiel 2.1. Mit einer Faustformel kann man den durchschnittlichen Bremsweg eines PKWs berechnen. Wenn s der Bremsweg in Metern und v die Geschwindigkeit in Kilometer pro Stunde ist, dann kann der Bremsweg über die Funktion $s(v) = 0{,}01\,v^2$ berechnet werden.

a) Berechne den Bremsweg bei einer Geschwindigkeit von 50 km/h.
Lösung: $s(50) = 0{,}01 \cdot 50^2 = 0{,}01 \cdot 2\,500 = 25$
Der Bremsweg beträgt 25 m.

b) Berechne die Geschwindigkeit für einen Bremsweg von 50 m.
Lösung:

$$\begin{aligned} 50 &= 0{,}01v^2 && \mid \div 0{,}01 \\ 5\,000 &= v^2 && \mid\sqrt{} \\ 70{,}7 &\approx v \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit liegt bei ca. 71 km/h.

A 2.1. Für den freien Fall eines Körpers, wenn man den Luftwiderstand vernachlässigt, gilt für die zurückgelegte Fallstrecke s in Metern und der Fallzeit t in Sekunden der funktionale Zusammenhang $s(t) = 5t^2$.

a) Hennes springt aus einem Flugzeug. Nach 8 Sekunden öffnet er den Fallschirm. Berechne die im freien Fall zurückgelegte Strecke.
b) Mia wirft einen Stein in den Brunnen der mittelalterlichen Reichsburg Kyffhausen. Der Stein schlägt nach 6 Sekunden auf dem Wasser auf. Berechne die Tiefe des Brunnens.
c) Jupp springt vom 5-Meter-Turm im Freibad. Berechne die Zeit, die bis zum Aufprall auf dem Wasser vergeht.
d) Louisa stürzt sich todesmutig vom 10-Meter-Turm ins Becken. Berechne die Zeit des freien Falls.
e) Die Niagarafälle an der Grenze zwischen den USA und Kanada haben eine Höhe von 57 m. Die auf kanadischer Seite gelegenen Horseshoe Falls wurden bereits mehrfach befahren. Die erste erfolgreiche Befahrung gelang der 63-jährigen Lehrerin Annie Taylor am 24. Oktober 1901 in einem gepolsterten Holzfass. Berechne, wie lange sie sich im freien Fall befunden hat.

A 2.2. Für einen Bogen gilt der funktionale Zusammenhang $W(s) = 140s^2$ für die Auszugsarbeit W in Joule und der Auszuglänge s in Metern.

a) Phillip zieht die Bogensehne 0,72 m zurück. Berechne die Auszugsarbeit.
b) Martha zieht die Bogensehne nur 65 cm aus. Berechne die Auszugsarbeit.
c) Laut der Dokumentation speichert der Bogen bei voller Auszugslänge eine Arbeit (Energie) von 80 J. Berechne die maximale Auszugslänge.

A 2.3. Für einen Pfeil mit der Masse $m = 50$ g gilt für die Bewegungsenergie E in Joule und die Geschwindigkeit v in Metern pro Sekunde der funktionale Zusammenhang $E(v) = 0{,}015v^2$.

a) Ein Compoundbogen kann einen Pfeil auf eine Geschwindigkeit von 80 m/s beschleunigen. Berechne die Energie des Pfeils.
b) Ein Bogen überträgt seine Spannenergie von 80 J auf einen Pfeil. Berechne die Geschwindigkeit des Pfeils.

A 2.4. In einer Zentrifuge trainieren Piloten und Astronauten das Arbeiten unter der mehrfachen Erdbeschleunigung g. Dabei dreht sich die Zentrifuge wie ein Karussel im Kreis und die Person in der Kapsel am Rand der Zentrifuge fühlt dadurch eine Kraft ähnlich der Gewichtskraft. Für eine Zentrifuge gilt für den Zusammenhang zwischen Beschleunigung a in g (Erdbeschleunigung) und der Bahngeschwindigkeit der Kapsel v in m/s die Funktion $a(v) = \frac{v^2}{50}$.

a) Zu Beginn dreht sich die Kapsel mit einer Geschwindigkeit von 10 m/s. Bereche die Beschleunigung, die die Person in der Kapsel erfährt.
b) Die Geschwindigkeit wird auf 15 m/s erhöht. Berechne nun die Beschleunigung.
c) Beim Astronautentraining wird bis maximal 7,5 g getestet. Berechne die Bahngeschwindigkeit der Zentrifuge für diese Beschleunigung.

• **A 2.5.** Der Sprung eines Autos über eine Schanze kann mit der Funktion $s(v) = av^2$ beschrieben werden. Dabei ist s die Sprungweite in Metern und v die Absprunggeschwindigkeit in Kilometer pro Stunde. Das Auto erreicht bei einer Geschwindigkeit von 80 km/h eine Sprungweite von 41 m. Berechne den Faktor a in der Funktion $s(v) = av^2$.

3 Verschieben der Normalparabel

A 3.1. Zeichne im GTR den Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ in ein Koordinatensystem ($x \in [-5; 5]$; $y \in [-2; 8]$). Dokumentiere Dein Vorgehen:

A 3.2. Zeichne auch die Graphen der Funktionen $g(x) = x^2 + 3$ und $h(x) = x^2 - 1$ im GTR.

a) Beschreibe den Unterschied zwischen den Parabeln.
b) Nenne jeweils die Koordinaten des Scheitelpunktes.
c) Die Funktionen $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$ haben die Form: $f(x) = x^2 + e$. Probiere weitere Werte für e aus.
d) Beschreibe die Wirkung der Variablen e auf den Graphen.

A 3.3. Zeichne im GTR den Graphen der Funktionen $f(x) = x^2$, $g(x) = (x + 3)^2$ und $h(x) = (x - 1)^2$ in ein Koordinatensystem ($x \in [-5; 5]$; $y \in [-4; 10]$).

a) Beschreibe den Unterschied zwischen den Parabeln.
b) Nenne jeweils die Koordinaten des Scheitelpunktes.
c) Die Funktionen $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$ haben die Form: $f(x) = (x + d)^2$. Probiere weitere Werte für d aus.
d) Beschreibe die Wirkung der Variablen d auf den Graphen.

A 3.4. Zeichne im GTR den Graphen der Funktionen $f(x) = x^2$, $g(x) = (x+3)^2 - 1$ und $h(x) = (x - 1)^2 + 3$ in ein Koordinatensystem ($x \in [-5; 5]$; $y \in [-4; 10]$).

a) Beschreibe den Unterschied zwischen den Parabeln.
b) Nenne jeweils die Koordinaten des Scheitelpunktes.
c) Die Funktionen $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$ haben die Form: $f(x) = (x + d)^2 + e$. Probiere weitere Werte für d und e aus.
d) Gebe den Scheitelpunkt mit Hilfe der Variablen d und e an.

A 3.5. Zeichne die Funktionen aus den vorherigen Aufgaben in ein Koordinatensystem ($x \in [-5; 5]$; $y \in [-2; 8]$) in das folgende Feld.

4 Scheitelpunkt und Nullstellen

Charakteristische Punkte für die Parabel sind der Scheitelpunkt und die Punkte, an denen der Parabel die X-Achse schneidet bzw. berührt. Da beim Schneiden und Berühren der X-Achse die Punkte immer den Y-Wert 0 haben, reicht es auch den X-Wert zu bestimmen. Da man den X-Wert auch als Stelle bezeichnet, redet man hier dann von den Nullstellen. Andersherum kann man sagen, an der Nullstelle ist der Funktionswert gleich 0.

Wenn x_0 eine Nullstelle ist, dann gilt: $f(x_0) = 0$.

Die Funktion $f(x) = x^2 + e$

A 4.1. Zeichne die folgenden Funktionen und bestimme aus dem Graphen den Scheitelpunkt und die Nullstellen.

a) $f(x) = x^2 - 1$ b) $f(x) = x^2 + 1$ c) $f(x) = x^2 - 4$ d) $f(x) = x^2 - 2{,}25$

A 4.2. Zeichne die folgenden Funktionen im GTR und bestimme aus dem Graphen den Scheitelpunkt und die Nullstellen.

a) $f(x) = x^2 - 9$ b) $f(x) = x^2 + 3$ c) $f(x) = x^2 - 12{,}25$ d) $f(x) = x^2 - 7{,}84$

Natürlich kann man den Scheitelpunkt und die Nullstellen auch ohne den Graphen bestimmen. Für eine Funktion $f(x) = x^2 + e$ hat der Scheitelpunkt die Koordinaten $(0|e)$. Die Nullstellen lassen sich über die Gleichung $x^2 + e = 0$ lösen.

Beispiel: $f(x) = x^2 - 16$

Für den Scheitelpunkt gilt: $S(0|-16)$.

Für die Nullstellen gilt die Gleichung:

$$\begin{aligned} x^2 - 16 &= 0 \qquad | +16 \\ x^2 &= 16 \qquad | \sqrt{} \\ x &= \pm 4 \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind also -4 und 4.

A 4.3. Bestimme ohne den GTR und ohne Zeichnung den Scheitelpunkt und die Nullstellen.

a) $f(x) = x^2 - 36$ c) $f(x) = x^2 - 1{,}44$ e) $f(x) = x^2 - 1{,}69$ g) $f(x) = x^2 - 5{,}76$
b) $f(x) = x^2 + 16$ d) $f(x) = x^2 - 361$ f) $f(x) = x^2 + 5{,}29$ h) $f(x) = x^2 - 8\,100$

Die Funktion $f(x) = (x - d)^2$

Der Scheitelpunkt der Funktion $f(x) = (x - d)^2$ ist ebenfalls einfach zu bestimmen. Da es sich um eine Verschiebung entlang der X-Achse handelt, ist der Y-Wert immer 0 und damit hat die Parabel genau eine Nullstelle, an der auch der Scheitelpunkt liegt. Die Koordinate des Scheitelpunkts lautet $(d|0)$.

Beispiel: $f(x) = (x - 3)^2$

Der Scheitelpunkt lautet $S(3|0)$ und die Nullstelle ist -3.

A 4.4. Zeichne die folgenden Funktionen und bestimme aus dem Graphen den Scheitelpunkt und die Nullstellen.

a) $f(x) = (x - 1)^2$ b) $f(x) = (x + 2)^2$ c) $f(x) = (x - 3)^2$ d) $f(x) = (x + 4{,}5)^2$

A 4.5. Bestimme ohne den GTR und ohne Zeichnung den Scheitelpunkt und die Nullstellen.

a) $f(x) = (x - 36)^2)$ c) $f(x) = (x - 1{,}44)^2$ e) $f(x) = (x - 1{,}69)^2$ g) $f(x) = (x - 5{,}76)^2$
b) $f(x) = (x + 16)^2$ d) $f(x) = (x + 361)^2$ f) $f(x) = (x + 5{,}29)^2$ h) $f(x) = (x + 8\,100)^2$

5 Lösungen

2 Anwendungsaufgaben zu $f(x) = ax^2$

A 2.1

a) $s(8) = 5 \cdot 8^2 = 320$

b) $s(6) = 5 \cdot 6^2 = 180$

c) $5 = s(t) = 5t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{5}{5}} = 1$

d) $10 = s(t) = 5t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{10}{5}} \approx 1{,}41$

e) $57 = s(t) = 5t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{57}{5}} \approx 3{,}38$

A 2.2

a) $W(0{,}72) = 140 \cdot 0{,}72^2 \approx 72{,}6$

b) $W(0{,}65) = 140 \cdot 0{,}65^2 \approx 59{,}2$

c) $80 = W(s) = 140s^2 \Rightarrow s = \sqrt{\frac{80}{140}} \approx 0{,}756$

A 2.3

a) $E(80) = 0{,}015 \cdot 80^2 = 96$

b) $80 = E(v) = 0{,}015 \cdot v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{80}{0{,}015}} = 73{,}0$

A 2.4

a) $a(10) = \frac{10^2}{50} = 2$

b) $a(15) = \frac{15^2}{50} = 4{,}5$

c) $7{,}5 = a(v) = \frac{v^2}{50} \Rightarrow v = \sqrt{50 \cdot 7{,}5} \approx 19{,}4$

A 2.5 $41 = s(v) = a \cdot 80^2 \Rightarrow a = \frac{41}{80^2} \approx 0{,}00641$

Inhaltsverzeichnis